Rend: Egy G csoportban egy g elem rendje, $o(g)$, az a legkisebb pozitív egész k kitevő, amelyre $g^k = e(=\text{egységelem})$. Ha nincs ilyen kitevő, akkor $o(g) = \infty$. Ennek a rendfogalomnak speciális esete a korábbi kongruenciás, illetve egységgyökös rend (melyik csoportokban?). Véges rend esetén $g^r = g^s \iff r \equiv s \pmod{o(g)}$, végtelen rend esetén pedig $g^r = g^s \iff r = s$. A véges rend tehát a legkisebb periódus, ami szerint a g hatványai ismétlődnek, és így g-nek pontosan $o(g)$ különböző hatványa van.

Ciklikus csoport/részcsoport: Egyetlen elem (pozitív egész, negatív egész és 0 kitevős) hatványaiból áll: $\langle g \rangle = \{g^m \mid m \in \mathbf{Z}\}$. Ha $o(g) = n$, akkor $\langle g \rangle = \{e, g, \ldots, g^{n-1}\} \cong \mathbf{Z}_n$, mert két elem szorzásánál tkp. a kitevőket adjuk össze mod n. Ha $o(g) = \infty$, akkor minden g^m különböző és $\langle g \rangle \cong \mathbf{Z}$.

Lagrange-tétel: Ha $|G| < \infty$ és $H \leq G$, akkor $|H|$ osztója $|G|$-nek. Speciálisan, ha $H = \langle g \rangle$, akkor $(|H| =)o(g) \mid |G|$.

Ciklus S_n-ben: $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ az a permutáció, amely i_j-t i_{j+1}-be viszi, i_k-t i_1-be, és a többi elemet fixen hagyja. Minden permutáció felírható diszjunkt ciklusok szorzataként lényegében egyértelműen.

11. Határozzuk meg az elemek rendjét a következő csoportokban: (a) $\mathbf{R}^\times$; (b) $\mathbf{C}^\times$; (c) $\mathbf{Z}_{20}$; (d) D_6; (e) a kör szimmetriacsoportja.

12. (a) Adjunk meg olyan végtelen csoportot, amelyben minden elem rendje véges.
(b) Van-e olyan végtelen csoport, ahol minden elem rendje legfeljebb 2?

13. (a) Lássuk be, hogy S_n nem kommutatív, ha $n \geq 3$.
(b) Mi a $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ és $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ permutációk gh szorzata? Végezzük el a szorzást a ciklusos felírásban is.
(c) Igazoljuk, hogy egy permutáció rendje a ciklushosszak legkisebb közös többszöröse (a diszjunkt ciklusok szorzataként történő felírásban).

14. Egy kártyacsomagból vagy megcserélhetjük a két felső lapot, vagy pedig a legfelső lapot a csomag legaljára tehetjük. Jól meg tudjuk-e keverni a kártyát ezekkel a lépésekkel (azaz minden lehetséges lapsorrend előáll-e így)?

15. Az udvaron egy körben áll n gyerek. Sípszóra akárhány pár helyet cserélhet egyszerre. Hány sípszó kell ahhoz, hogy mindenki a jobb oldali szomszédja helyére kerüljön?

16. (a) Igazoljuk, hogy egy Abel-csoportban $o(ab) \mid [o(a), o(b)]$.
(b) Lehet-e egy (nem feltétlenül kommutatív) csoportban két véges rendű elem szorzata végtelen rendű?

17. Az alábbi csoportok közül melyek ciklikusak?
(a) $\mathbf{Q}^+$; (b) $\mathbf{Z}_7^\times$; (c) $\mathbf{Z}_8^\times$; (d) S_2; (e) S_{12}; (f) $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Q})$;
(g) az 5 nevezőjű törtek az összeadásra; (h) a téglalap szimmetriacsoportja;
(i) a komplex egységgyökök a szorzásra; (j) a 100-adik egységgyökök a szorzásra.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 16 elemű csoportban van olyan g elem, melyre $g^2 \neq g^{10}$, akkor a csoport ciklikus. Igaz marad-e a következtetés, ha a csoportnak 24 eleme van?

19. Mutassuk meg, hogy ha p prím, akkor lényegében csak egyetlen p elemű csoport létezik, azaz bármelyik kettő izomorf.

20. Bizonyítsuk be:
(a) G-nek akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja, ha $|G|$ prímszám.
(b) G-nek akkor és csak akkor van véges sok részcsoportja, ha $|G| < \infty$.