Mellékosztály: Ha $H \le G$, akkor $cH = \{ch \mid h \in H\}$ a c-nek a H szerinti bal oldali mellékosztálya. Két bal oldali mellékosztály vagy diszjunkt, vagy egybeesik, továbbá $|cH| = |H|$. A (különböző) mellékosztályok száma a H indexe G-ben, jele $|G : H|$. A bal és jobb oldali mellékosztályok általában nem ugyanazok, azonban a számuk megegyezik.

Direkt szorzat: A és B két tetszőleges csoport, ekkor a direkt szorzatuk $A \times B$ az a csoport, amelynek elemei az (a, b) párok, ahol $a \in A$ és $b \in B$, és a műveletet komponensenként végezzük. Több csoport direkt szorzata is hasonlóan értelmezhető. Tehát a direkt szorzat olyan, mint a vektorok koordinátás felírása, csak itt az egyes koordináták különböző csoportokból is lehetnek.

Kis elemszámú csoportok: (i) $|G| = p(=\text{prím}) \iff G \cong \mathbf{Z}_p$. (ii) $|G| = 4 \iff G \cong \mathbf{Z}_4$ vagy K=Klein-csoport. (iii) $|G| = 2p$, ahol $p > 2$ prím $\iff G \cong \mathbf{Z}_{2p}$ vagy D_p. (iv) $|G| = p^2 \iff G \cong \mathbf{Z}_{p^2}$ vagy $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$. (v) $|G| = 8 \iff G \cong \mathbf{Z}_8$ vagy D_4 vagy $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2$ vagy $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ vagy Q=kvaterniócsoport.

Inverziószám, permutáció előjele: A „régi” permutáció inverziószáma ahány elempárnál a nagyobb megelőzi a kisebbet. Egy permutáció aszerint páros vagy páratlan, hogy az inverziószám páros vagy páratlan. Az „új”, S_n-beli permutációra ez azzal ekvivalens, hogy a permutáció páros vagy páratlan sok kételemű ciklus, azaz transzpozíció (vagy csere) szorzata. A páros permutációk S_n-ben egy 2 indexű részcsoportot alkotnak, ha $n > 1$, jele A_n. Egy permutáció előjele $(-1)^I$, ahol I az inverziószám, azaz egy páros permutáció előjele pozitív, egy páratlané pedig negatív. Szorzat előjele az előjelek szorzata.

21. Írjuk fel D_6-ban az (a) $\langle f^2 \rangle$; (b) $\langle t \rangle$ részcsoportok szerinti bal és jobb oldali mellékosztályokat.

22. Határozzuk meg az alábbi indexeket: (a) $|\mathbf{Z} :$ 0-ra végződő egészek$|$; (b) $|D_n : \langle f \rangle|$; (c) $|\mathbf{Z}_{30} : \langle 12 \rangle|$; (d) $|\mathbf{C} : \mathbf{R}|$; (e) $|S_5 : \langle (1234) \rangle|$.

23. (a) Lássuk be, hogy ha G kommutatív vagy $|G : H| = 2$, akkor a H szerinti bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek.
(b) Tegyük fel, hogy van olyan $c \notin H$, amelyre $cH = Hc$. Következik-e ebből, hogy a bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, ha $|G : H|$ értéke (b1) 3; (b2) 4; *(b3) 5?

24. Mutassuk meg: $aH = bH \iff a^{-1}bH = H \iff a^{-1}b \in H$.

25. Igazoljuk, hogy $A \times B$-nek van A-val és B-vel izomorf A^*, illetve B^* részcsoportja és minden $g \in A \times B$ egyértelműen felírható $g = a^*b^*$ alakban, ahol $a^* \in A^*, b^* \in B^*$.

26. Bizonyítsuk be:
(a) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
(b) $A \times B$ akkor és csak akkor kommutatív, ha A és B kommutatív.
(c) $o\big((a, b)\big) = [o(a), o(b)]$, illetve ∞, ha $o(a)$ vagy $o(b) = \infty$.

27. (a) Lássuk be, hogy $G \times \{e\} \cong G$.
(b) Az alábbi csoportok közül melyek izomorfak két, egynél nagyobb elemszámú csoport direkt szorzatával: (b1) $\mathbf{Z}_{10}$; (b2) $\mathbf{Z}_8$; (b3) D_4; (b4) S_3; (b5) $\mathbf{R}^*$?

28. Van-e olyan véges csoport, melyben a másodrendű elemek száma (a) 2019; (b) 2020?

29. Az alábbi csoportok közül melyek izomorfak:
(a) a téglalap szimmetriacsoportja;
(b) D_4-ben a forgatások a kompozícióra;
(c) a modulo 10 redukált maradékosztályok a szorzásra;
(d) a modulo 8 redukált maradékosztályok a szorzásra;
(e) a modulo 8 „páros” maradékosztályok az összeadásra;
(f) a ± 1, $\pm i$ komplex számok a szorzásra;
(g) az $a + bi$, $a, b \in \mathbf{Z}_2$ alakú „komplex számok” az értelemszerű összeadásra;
(h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a szorzásra;
(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a szorzásra.

30. (a) Mennyi az inverziószám az alábbi permutációkban?
(a1) $1, 3, 5, \ldots, 49, 51, 50, 48, \ldots, 4, 2$; (a2) $26, 27, 25, 28, 24, \ldots, 51, 1$.
(b) Hogyan változik az inverziószám, ha (b1) két szomszédos helyen álló; (b2) két szomszédos nagyságú; (b3) két tetszőleges elemet felcserélünk?
(c) Igazoljuk, hogy ugyanannyi páros és páratlan permutáció van, ha $n > 1$.
(d) Milyen k értékek fordulnak elő inverziószámként n elem permutációiban?

31. Egy árokban 100 szöcske ül egy vonalban egymás mellett. Időnként egyikük átugorja valamelyik szomszédját. Lehet-e, hogy 2019 ugrás után újra az eredeti sorrendben ülnek?

32. (a) Bontsuk fel az $(12 \ldots k)$ ciklust transzpozíciók szorzatára.
(b) Hogyan látszik a diszjunkt ciklusok szorzataként történő felírásból, hogy egy permutáció páros vagy páratlan?