

Determináns (D_n egy $n \times n$ -es mátrix determinánsa.)

41. Egy 4×4 -es mátrix determinánsának a kiszámításakor mi az alábbi tagok előjele:

(i) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$; (ii) $a_{23}a_{42}a_{31}a_{14}$?

42. Számítsuk ki:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}.$$

43. Hogyan változik D_n , ha a függőleges középvonalára tükrözzük?

44. Igaz vagy hamis? (A egy négyzetes mátrix, D a determinánsa.)

(a) Ha A minden eleme páros szám, akkor D is az.

(b) Ha A minden eleme páratlan szám, akkor D is az.

(c) Ha A minden eleme racionális szám, akkor D is az.

(d) Ha A minden eleme irracionális szám, akkor D is az.

(e) Ha A minden eleme nem-negatív szám, akkor D is az.

45. Számítsuk ki D_{100} -at, ha minden sora számtani sorozat.

46. Hány olyan w komplex szám van, amelyre egy komplex elemű D_n minden elemét w -vel szorozva D_n a $\sqrt{2} + \pi i$ -szeresére változik?

47. Melyik az a legkisebb k , amelyre igaz, hogy ha egy $n \times n$ -es mátrixban legalább k darab 0 van, akkor a mátrix determinánsa szükségképpen 0?

48. Számítsuk ki D_n -t, ha a főátló minden eleme c , a többi elem pedig d .

49. $9 \mid 2349$, $9 \mid 4437$, $9 \mid 5481$, $9 \mid 2088$ és történetesen $9 \mid \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}$. Véletlen egybeesésről

van-e szó? És mi a helyzet 9 helyett 29-cel?

50. Egy 100×100 -as mátrix minden eleméhez hozzáadunk x -et, és képezzük az így kapott mátrix determinánsát. Hányadfokú polinomja ez x -nek?

51. Egy 1111×1111 -es mátrix antiszimmetrikus, azaz minden i, j -re $a_{ij} = -a_{ji}$. Számítsuk ki a determinánsát.

52. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1308 & 1458 & 1629 \\ 1707 & 1526 & 1686 & 1038 \\ 1683 & 1041 & 1867 & 1956 \\ 1896 & 1848 & 1914 & 1490 \end{vmatrix} \neq 0.$$

53. Egy 1000×1000 -es valós elemű mátrixban tetszőleges számú elem helyére általunk választott elemeket írhatunk. Legkevesebb hány elem módosításával tudjuk elérni, hogy a keletkező determináns 0 legyen?

54. Számítsuk ki az alábbi determinánst és általánosítsuk a feladatot:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$