Determináns (D_n egy $n \times n$-es determináns, D_{ij} a megfelelő előjeles aldetermináns.)

55. Számítsuk ki D_n-t, ha a főátló minden eleme $c + d$, a közvetlenül a főátló felett álló $n - 1$ elem cd, a közvetlenül a főátló alatt álló $n - 1$ elem 1, a többi elem pedig 0.

56. Számítsuk ki D_{2k}-t, ha a főátló minden eleme c, a (főátlóra merőleges) másik átló minden eleme d, a többi elem pedig 0.

57. Bizonyítsuk be, hogy α_{11}-et és α_{12}-t megcserélve a determináns akkor és csak akkor nem változik, ha $\alpha_{11} = \alpha_{12}$ vagy $D_{11} = D_{12}$.

58. D_n-ben az első két sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsok rendre megegyeznek, azaz minden j-re $D_{1j} = D_{2j}$. Számítsuk ki D_n-t.

59. Számítsuk ki D_n-t, ha az i-edik sor j-edik eleme i^j.

60. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mi a helyzet, ha a mátrixokat a modulo 3 test felett tekintjük?

61. Hogyan jellemezhetők azok az egész elemű négyzetes mátrixok, amelyeknek az inverze is egész elemű?

62. Igaz vagy hamis? (A, B adott, X, Y pedig ismeretlen $n \times n$-es mátrixok.)

(a) Ha $\det A \neq 0$, akkor $AX = B$ megoldható.

(b) Ha $\det A = 0, \det B \neq 0$, akkor $AX = B$ nem oldható meg.

(c) Ha $\det A = 0, \det B = 0$, akkor $AX = B$ megoldható.

(d) Ha $AX = B$ megoldható, akkor $YA = B$ is megoldható.

(e) Ha $AX = B$ és $YA = B$ is egyértelműen megoldható, akkor ezek a megoldások megegyeznek.

63. Oldjuk meg az alábbi valós egyenletrendszereket, ahol (b)-ben $\alpha_i \neq \alpha_j$, ha $i \neq j$.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + {} & x_2 + \ldots + {} & x_n &= n \\ x_1 + {} & 2x_2 + \ldots + {} & nx_n &= n^2 \\ & \vdots \\ x_1 + {} & 2^{n-1}x_2 + \ldots + {} & n^{n-1}x_n &= n^n \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + {} & x_2 + \ldots + {} & x_n &= 1 \\ \alpha_1 x_1 + {} & \alpha_2 x_2 + \ldots + {} & \alpha_n x_n &= \beta \\ & \vdots \\ \alpha_1^{n-1}x_1 + {} & \alpha_2^{n-1}x_2 + \ldots + {} & \alpha_n^{n-1}x_n &= \beta^{n-1} \end{aligned}$$

64. Adjunk új bizonyítást az interpolációs polinom létezésére és egyértelműségére: Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ a T test különböző elemei, $b_1, \ldots, b_n$ pedig a T tetszőleges elemei. Ekkor pontosan egy olyan legfeljebb $n - 1$-edfokú $f \in T[x]$ polinom létezik (beleértve az $f = 0$ polinom lehetőségét is), amelyre $f(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.