Vektortér: A sík- és térvektoroknak, azok összeadásának és valós számmal történő szorzásának általánosítása. Egy $V \neq \emptyset$ halmaz vektortér a T test felett, ha értelmezve van benne egy összeadás és egy, a T elemeivel vett szorzás, amelyekre a szokásos tulajdonságok teljesülnek. Speciálisan, az összeadásra pontosan ugyanazok, mint egy gyűrűben vagy egy testben, azaz V az összeadásra nézve kommutatív csoport (kommutativitás, asszociativitás, nullelem, ellentett). V elemeit vektoroknak, T elemeit skalároknak hívjuk (bármik is legyenek azok).

Altér: Egy V vektortér egy W részhalmaza, ha maga is vektortér ugyanazon T test felett a V-beli műveletekre. Egy $\emptyset \neq W \subseteq V$ akkor és csak akkor altér, ha zárt a V-beli összeadásra és skalárral való szorzásra. (Analóg fogalom egy csoport részcsoportjával.)

Generált altér: az adott vektorok összes lineáris kombinációinak halmaza: $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i \mid \lambda_i \in T$. Ez a legszűkebb altér, ami az $\mathbf{a}_i$ vektorokat tartalmazza. (Analógia az egy elem által generált ciklikus részcsoporttal.)

Generátorrendszer: a V vektortér minden eleme előáll az adott vektorok lineáris kombinációjaként, azaz az általuk generált altér az egész V.

(W altér a T test feletti V vektortérben, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, G generátorrendszer.)

65. Melyek alkotnak vektorteret a szokásos műveletekre $\mathbf{R}$ felett?

(a) Azok a valós elemű 3×3-as mátrixok, amelyeknél (a1) az elemek racionális számok; (a2) a determináns 0; (a3) van két azonos elem; (a4) az első sor első két eleme azonos; (a5) az elemek összege 0; (a6) az elemek szorzata 0.

(b) A valós együtthatós polinomok közül (b1) a páros fokúak és a 0; (b2) azok, amelyekben csak páros fokú tagok szerepelnek; (b3) a legfeljebb 10-edfokúak és a 0; (b4) a legalább 10-edfokúak és a 0.

(c) A síkon (c1) az első síknegyed; (c2) az $(x, \pi x)$ pontok halmaza; (c3) az $(x, \pi + x)$ pontok halmaza (a sík pontjait az origóból oda mutató helyvektorokkal azonosítjuk);

(d) Azok a komplex számok, amelyek (d1) valós és képzetes része egyenlő; (d2) valós és képzetes részének a négyzete egyenlő; (d3) szöge egyenlő és a 0.

66. Mi következik $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ és W viszonyára (tartalmazási szempontból), ha
(a) $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{v} \in W$; (b) $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{v} \notin W$; (c) $\mathbf{u} \notin W$, $\mathbf{v} \notin W$?

67. Mi következik $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és W viszonyára (tartalmazási szempontból), ha
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$; (b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \notin W$; (c) $3\mathbf{u} + 7\mathbf{v} \in W$, $5\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \in W$;
(d) $3\mathbf{u} + 7\mathbf{v} \in W$, $5\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \notin W$; (e) $3\mathbf{u} + 7\mathbf{v} \notin W$, $5\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \notin W$?

68. Igazoljuk, hogy két altér metszete is altér. Mikor lesz két altér egyesítése is az?

69. A valós számokon definiáljunk egy új $\oplus$ összeadást és racionális számokkal mint λ skalárokkal új $\odot$ szorzást a következőképpen: $u \oplus v = u + v + 2$, $\lambda \odot v = \lambda v + 2\lambda - 2$, ahol az egyenlőségek jobb oldalán a valós számok szokásos összeadása, illetve szorzása szerepel. Vektorteret kapunk-e így?

70. Az egész számok szokásos összeadása mellett a racionális számokkal mint λ skalárokkal való új $\odot$ szorzást definiáljuk $\lambda \odot s = s$ módon. Mely vektortéraxiómák teljesülnek?

71. Lássuk be (λ, $\mu \in T$):
(a) $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \lambda = 0$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
(b) $\lambda \mathbf{v} = \mu \mathbf{v} \iff \lambda = \mu$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
(c) $\lambda \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} \iff \lambda = 0$ vagy $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

72. A legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok vektorterében melyek G-k?
(a) $1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3$; (b) $1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1$
(c) $1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3, x - x^2, x - x^3, x^2 - x^3$;
(d) $1 + x + x^2 + x^3, 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3, 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3, 1 + 4x + 16x^2 + 64x^3$.

73. Igaz vagy hamis? ($\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k$ G-t alkot.)
(a) G-hez egy vektort hozzávéve mindig G marad.
(b) G-ből egy vektort elhagyva mindig G marad.
(c) Ha $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ előállnak $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k$ lineáris kombinációiként, akkor $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ is G.
(d) Ha $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k$ előállnak $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ lineáris kombinációiként, akkor $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ is G.
(e) $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3, \ldots, \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \ldots + \mathbf{g}_k$ is G.

74. Adjunk meg egy-egy G-t az alábbi, végtelen valós sorozatokból álló vektorterekben.
(a) Számtani sorozatok; (b) 5 periódusú sorozatok; (c) a prímszám helyeken azonosak az értékek, és az összetett számokon is azonosak.