Lineáris függetlenség és összefüggés: Bármely $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ vektorokra $\sum_{j=1}^{k} 0\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$. A vektorok lineárisan függetlenek(F), ha CSAK ez a triviális lineáris kombináció lesz a nullvektor, és lineárisan összefüggők(Ö), ha van olyan nem-triviális lineáris kombinációjuk, ami előállítja a nullvektort. Két vagy több vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha van köztük olyan, ami felírható a többi lineáris kombinációjaként.

Bázis(B): Lineárisan független generátorrendszer, F+G. Adott vektorok akkor és csak akkor alkotnak B-t, ha V minden eleme *egyértelműen* felírható ezen vektorok lineáris kombinációjaként. A csak a nullvektorból álló vektortértől eltekintve bármely G-ből kiválasztható B, és ha van a vektortérben (véges) G, akkor bármely F kiegészíthető B-sá. Mindig igaz, hogy $|F| \leq |G|$, és ebből következik, hogy bármely B azonos elemszámú.

Dimenzió: $\dim V = |\mathrm{B}|$, ha van B; 0, ha $V = \{\mathbf{0}\}$, és ∞, ha V-ben nincs véges G. Véges dimenzió esetén ez egyben a F vektorok maximális száma, illetve a G-ek minimális elemszáma. Legyen $\dim V = n > 0$. Ekkor n-nél kevesebb vektor biztosan nem G, n-nél több vektor biztosan nem F, és n vektor akkor és csak akkor G, ha F, tehát ekkor B. Ha W altér V-ben, akkor $\dim W \leq \dim V$, és $\dim V < \infty$ esetén $\dim W = \dim V \iff W = V$.

75. Az alábbi vektorrendszerek közül melyek F?
(a) $\mathbf{R}^4$-ben $(1,2,3,4)$, $(2,5,8,11)$, $(4,9,14,19)$;
(b) $\mathbf{R}[x]$-ben 3 tetszőleges különböző fokú polinom;
(c) $\mathbf{C}$-ben mint $\mathbf{R}$ feletti vektortérben 3 tetszőleges komplex szám;
(d) $\mathbf{R}$-ben mint $\mathbf{Q}$ feletti vektortérben $\lg 3$, $\lg 5$, $\lg 7$.

76. Igaz vagy hamis?
(a) Egy vektor önmagában mindig F.
(b) Két vektor pontosan akkor Ö, ha valamelyik a másik skalárszorosa.
(c) Két vektor pontosan akkor Ö, ha mindegyik a másik skalárszorosa.
(d) Három vektor pontosan akkor Ö, ha valamelyikük egy másik skalárszorosa.

77. Adjunk meg 6 olyan Ö vektort, amelyek közül bármelyik 5 F.

78. Melyek alkotnak B-t $\mathbf{R}^3$-ban?
(a) $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$; (b) $(1,2,3)$, $(0,1,0)$, $(3,2,1)$;
(c) $(1,1,1)$, $(1,2,4)$, $(1,3,9)$; (d) $(1,2,8)$, $(7,5,3)$, $(\pi,2,9)$, $(\lg 2, \sqrt{3}, \sin 2020°)$.

79. Az alábbi vektorrendszerek közül melyek F, melyek G, és melyek B a $\mathbf{C}^{2\times 2}$ szokásos vektortérben?
(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};$
(b) Azok a mátrixok, amelyekben két elem 1-es, a másik két elem 0;
(c) Azok a mátrixok, amelyek egyik sorában vagy oszlopában két 1-es áll, és a másik két elem 0;
(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$

80. Mennyi az alábbi, $\mathbf{R}$ feletti vektorterek dimenziója? (A műveletek a „szokásosak". A legfeljebb k-adfokú polinomok közé beleértjük a 0 polinomot is.)

(a) $\mathbf{C}$;

(b) azok a valós számnégyesek, ahol a koordináták összege 0;

(c) a szimmetrikus $n \times n$-es mátrixok;

(d) a végtelen számtani sorozatok;

(e) azok a legfeljebb 6-odfokú $f \in \mathbf{R}[x]$ polinomok, amelyekre $f(\pi) = 0$;

(f) azok a legfeljebb 6-odfokú $f \in \mathbf{R}[x]$ polinomok, amelyekre $f(1 + i) = 0$;

(g) a legfeljebb 5-ödfokú **komplex** együtthatós polinomok ($\mathbf{R}$ felett!);

(h) azok a 4-változós polinomok, amelyben minden tag (össz)foka pontosan 6;

(i) azok a 4-változós polinomok, amelyben minden tag (össz)foka legfeljebb 6.

81. Tegyük fel, hogy $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ B egy $\mathbf{R}$ feletti vektortérben. Mi mondható F/Ö, G, B szempontból az alábbi vektorokról?

(a) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_1 + n\mathbf{u}_n$;

(b) $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_1$;

(c) $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_1$;

(d) $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{u}_n$.

82. Hány (a) elem; (b) 1-dimenziós altér; *(c) 2-dimenziós altér van a $(\mathbf{Z}_3)^5$ vektortérben?