Faktorgyűrű: Legyen I ideál egy R gyűrűben. Ekkor az R/I faktorgyűrű elemei az $r+I = \{r+i \mid i \in I\}$ maradékosztályok és a műveleteket a reprezentánsok segítségével definiáljuk: $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$ és $ab+I = (a+I)(b+I)$. Két maradékosztály vagy diszjunkt, vagy egybeesik. Az ideál azt biztosítja, hogy a műveletek eredménye nem függ attól, hogy az egyes osztályokból melyik reprezentánst vettük. Főpélda: $\mathbf{Z}/(m) = \mathbf{Z}_m$.

Gyűrűhomomorfizmus: művelettartó leképezés. Ha R_1 és R_2 gyűrű, akkor egy $\varphi : R_1 \to R_2$ függvény gyűrűhomomorfizus, ha $\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$ és $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. A képhalmaz $\operatorname{Im}\varphi$ részgyűrű R_2-ben, a mag, $\operatorname{Ker}\varphi$, azaz a 0-ba képződő elemek pedig ideál R_1-ben.

Izomorfizmus: bijektív homomorfizmus. Két gyűrű izmorf, ha van köztük izomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy tkp. ugyanarról a gyűrűről van szó, csak másképp jelöljük az elemeket és a műveleteket. Egy $R_1 \to R_2$ homomorfizmus pontosan akkor izomorfizmus, ha a mag 0 és a kép az egész R_2.

Faktorgyűrű és homomorfizmus kapcsolata: (A) *Homomorfizmustétel*: Ha $\varphi : R_1 \to R_2$ gyűrűhomomorfizmus, akkor $\operatorname{Im}\varphi \cong R_1/\operatorname{Ker}\varphi$. (B) *Természetes homomorfizmus*: Ha I ideál R-ben, akkor a $\varphi : R \to R/I$, $\varphi(r) = r + I$ leképezés olyan gyűrűhomomorfizmus, amelynek a magja I. (A) és (B) együttesen azt mutatja, hogy a faktor és a homomorfizmus átjátszhatók egymásra.

(R, R_1, R_2 gyűrű, I ideál, φ gyűrűhomomorfizmus.)

56. Legyen $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ és $\varphi(2020 + i\sqrt{7}) = \varphi(e + i\pi)$. Mi lesz $\varphi(\sin 6^\circ + i \ln 3)$?

57. $0 \neq \varphi : R_1 \to R_2$. Igaz vagy hamis?
(a) Ha R_1 kommutatív, akkor $\operatorname{Im}\varphi$ is az.
(b) Ha $\operatorname{Im}\varphi$ kommutatív, akkor R_1 is az.
(c) Ha R_1 egységelemes, akkor $\operatorname{Im}\varphi$ is az.
(d) Ha $\operatorname{Im}\varphi$ egységelemes, akkor R_1 is az.
(e) Ha R_1 nullosztómentes, akkor $\operatorname{Im}\varphi$ is az.
(f) Ha $\operatorname{Im}\varphi$ nullosztómentes, akkor R_1 is az.
(g) Ha R_1 test, akkor $\operatorname{Im}\varphi$ is az.
(h) Ha $\operatorname{Im}\varphi$ test, akkor R_1 is az.

58. Milyen ismert gyűrűvel izomorfak? (a) $\mathbf{Z}[x]/(x)$; (b) $\mathbf{Z}[x]/(2)$; (c) $\mathbf{Z}[x]/(x^2+x+1, 2)$.

59. Vizsgáljuk meg az 57. feladat kérdéseit R és R/I vonatkozásában is, ahol $I \neq R$.

60. Jelölje $\mathcal{P}(H)$ a H halmaz összes részhalmazainak halmazát.
(a) Lássuk be, hogy $\mathcal{P}(H)$ egységelemes gyűrű, ha az összeadás a szimmetrikus differencia és a szorzás a metszet.
(b) Ez a gyűrű (b1) kommutatív; (b2) minden a elemére $a^2 = a$ és (b3) $a + a = 0$.
(c) Egy gyűrűben a (b1)–(b3) tulajdonságok közül melyikből következik a másik kettő?
(d) Mik a nullosztók $\mathcal{P}(H)$-ban?
(e) Mik a főideálok $\mathcal{P}(H)$-ban?
(f) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{P}(H)$-ban akkor és csak akkor lesz minden ideál főideál, ha H véges halmaz.
(g) Legyen $L \subseteq H$. Igazoljuk, hogy $\mathcal{P}(H)/(L) \cong \mathcal{P}(H \setminus L)$.

61. Legyen $R = \mathbf{Z}_{100}$. Mely $c \in \mathbf{Z}_{100}$ elemekre lesz $\varphi(x) = cx$ egy $\varphi : R \to R$ gyűrűhomomorfizmus? Mi lesz ezekben az esetekben a mag és a kép?

62. Igazoljuk, hogy ha R véges gyűrű, akkor bármely R-ből induló φ gyűrűhomomorfizmusra $|R| = |\mathrm{Ker}\,\varphi| \cdot |\mathrm{Im}\,\varphi|$.

63. Mutassunk példát $\mathbf{Z}$-ben ideáloknak végtelen hosszú, szigorúan csökkenő láncára.

64. Tekintsük az összes $a_1 2^{b_1/2^{c_1}} + \ldots + a_1 2^{b_t/2^{c_t}}$ alakú számot, ahol t pozitív egész szám, a_i tetszőleges egész szám, b_i, c_i pedig nemnegatív egész szám.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ezek a valós számoknak egy olyan részgyűrűjét alkotják, amely tartalmazza $\mathbf{Z}$-t.

(b) Mutassuk meg, hogy ebben a gyűrűben nem teljesül a számelmélet alaptételéhez szükséges láncfeltétel.